Svolgimento

1 **a.** Determiniamo il dominio di $f(x)$ richiedendo che il radicando sia positivo o nullo. Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$\frac{2^{x+2} \cdot 3^{x+1} - 18^{-1}}{4^x - 2^{x+1} + 1} \geq 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N \geq 0: 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} - 18^{-1} \geq 0 \rightarrow 4 \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 3 \geq 18^{-1} \rightarrow 12 \cdot 18 \cdot 6^x \geq 1 \rightarrow$$

$$216 \cdot 6^x \geq 6^0 \rightarrow 6^{x+3} \geq 6^0 \rightarrow x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3;$$

$$D > 0: 4^x - 2^{x+1} + 1 > 0 \rightarrow 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 > 0 \rightarrow (2^x - 1)^2 > 0 \rightarrow$$

$$2^x \neq 1 \rightarrow x \neq 0.$$

Il radicando è definito per $x \geq -3 \wedge x \neq 0$, quindi il dominio della funzione è

$D: [-3; 0[\cup]0; +\infty[$.

b. Determiniamo il dominio di $g(x)$ richiedendo che il radicando sia positivo. Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$\frac{5^{2-x} + 5^{1-x} - 4 \cdot 5^{-x} - 26}{2^{2x} - 17 \cdot 2^{x-2} + 1} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N \geq 0: 5^{2-x} + 5^{1-x} - 4 \cdot 5^{-x} - 26 \geq 0 \rightarrow \frac{5^2}{5^x} + \frac{5}{5^x} - \frac{4}{5^x} \geq 26 \rightarrow \frac{26}{5^x} \geq 26 \rightarrow$$

$$5^{-x} \geq 1 \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0;$$

$$D > 0: 2^{2x} - 17 \cdot 2^{x-2} + 1 > 0 \rightarrow 2^{2x} - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 > 0.$$

Per studiare il segno del denominatore usiamo un'incognita ausiliaria: $t = 2^x$. Riscriviamo la disequazione nella forma:

$$4t^2 - 17t + 4 > 0.$$

Calcoliamo le radici del polinomio in *t*:

$$\Delta = 289 - 64 = 225 \rightarrow t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8} \rightarrow t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{4}.$$

La disequazione è soddisfatta per:

$$t < \frac{1}{4} \vee t > 4 \rightarrow 2^x < \frac{1}{4} \vee 2^x > 4 \rightarrow x < -2 \vee x > 2.$$

Studiamo il segno del radicando compilando il quadro dei segni.

		-2		0		2	
N	+		+	0	−		−
D	+	0	−		−	0	+
$\frac{N}{D}$	+	∄	−	0	+	∄	−

Il dominio della funzione è

$$D:]-\infty; -2[\cup [0; 2[.$$

2

a. Osserviamo che la base della potenza è sempre positiva in $\mathbb{R}$. Infatti, il trinomio ha il coefficiente di x^2 positivo e il discriminante ridotto è $\frac{\Delta}{4} = 9 - 12 < 0$.
L'uguaglianza è vera in due casi distinti.
Nel primo caso, la base della potenza è uguale a 1. Risolviamo, quindi, l'equazione:

$$\frac{x^2 - 6x + 12}{4} = 1 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0;$$
$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.$$

Il secondo caso in cui l'equazione di partenza è soddisfatta è quando l'esponente vale 0:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0,$$
$$\frac{\Delta}{4} = 16 + 9 = 25 \rightarrow x_{3,4} = \frac{4 \pm 5}{3} \rightarrow x_3 = 3, x_4 = -\frac{1}{3}.$$

L'equazione ha quattro soluzioni reali: $-\frac{1}{3}, 2, 3, 4$.

b. Stabiliamo le condizioni di esistenza imponendo che l'argomento di ognuno dei tre logaritmi sia positivo:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) < 0 \\ x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 1 \vee x > 2 \end{cases} \rightarrow \text{impossibile.}$$

Per nessun valore di x i due membri sono entrambi definiti, quindi l'equazione è impossibile.

3

a. Imponiamo le condizioni di passaggio:

- passaggio per $A(-3; -6)$: deve valere $f(-3) = -6 \rightarrow -6 = a + b \cdot 2^{-3c}$;
- passaggio per $B(-1; 0)$: deve valere $f(-1) = 0 \rightarrow 0 = a + b \cdot 2^{-c}$;
- passaggio per $C\left(1; \frac{3}{2}\right)$: deve valere $f(1) = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = a + b \cdot 2^{c}$.

Sappiamo che $c \neq 0$, ma deve essere anche $b \neq 0$, altrimenti $f(x)$ sarebbe una funzione costante e non potrebbe quindi passare per i punti *A*, *B* e *C*. Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a + b \cdot 2^{-3c} = -6 \\ a + b \cdot 2^{-c} = 0 \\ a + b \cdot 2^{c} = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b(2^{-3c} - 2^{-c}) = -6 \\ b(2^{c} - 2^{-c}) = \frac{3}{2} \\ a = -b \cdot 2^{-c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b \cdot 2^{-3c}(1 - 2^{2c}) = -6 \\ b \cdot 2^{-c}(2^{2c} - 1) = \frac{3}{2} \\ a = -b \cdot 2^{-c} \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima e la seconda equazione dalla terza abbiamo ottenuto il sistema ridotto. Mettiamo a rapporto le prime due equazioni,
ricordando che $b \neq 0$ e che $c \neq 0 \rightarrow 2^{2c} - 1 \neq 0$:

$$\frac{b \cdot 2^{-3c}(1 - 2^{2c})}{b \cdot 2^{-c}(2^{2c} - 1)} = -6 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow 2^{-2c} = 4 \rightarrow -2c = 2 \rightarrow c = -1.$$

Ricaviamo b dalla seconda equazione del sistema ridotto:

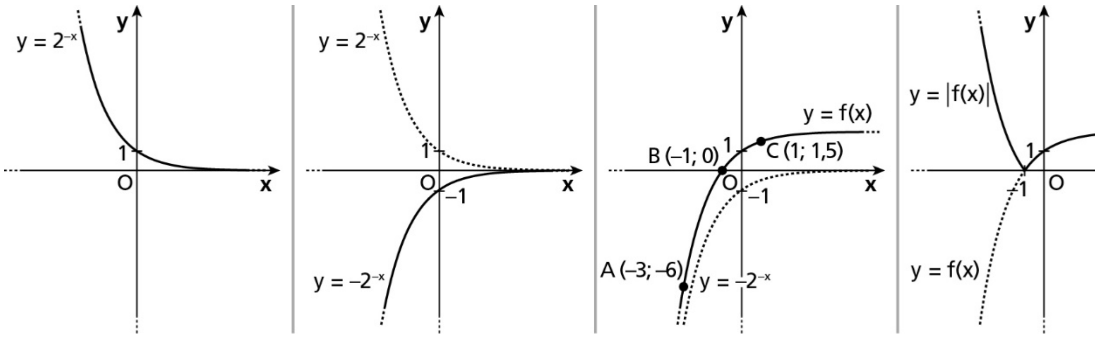
$$b \cdot 2^1(2^{-2} - 1) = \frac{3}{2} \rightarrow 2b \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \rightarrow b = -1.$$

Per trovare a torniamo al sistema iniziale:

$$\begin{cases} c = -1 \\ a = -b \cdot 2^{-c} \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Pertanto, $f(x) = 2 - 2^{-x}$.

b. Costruiamo il grafico di $f(x)$ a partire dal grafico di $y = 2^{-x}$ e quello di $g(x)$ a partire da quello di $f(x)$.



c. Risolviamo la disequazione:

$$g(x) \geq 2 \rightarrow |2 - 2^{-x}| \geq 2 \rightarrow 2 - 2^{-x} \leq -2 \vee 2 - 2^{-x} \geq 2 \rightarrow 4 \leq 2^{-x} \vee 2^{-x} \leq 0 \rightarrow$$
$$2^{-x} \geq 2^2 \rightarrow x \leq -2.$$

4

a. Imponiamo il passaggio della curva per i punti dati.

$$Q\left(-3; \frac{640}{243}\right): \quad f(-3) = \frac{640}{243} \rightarrow a \cdot 9^{-3} + b \cdot 3^{-3} + c = \frac{640}{3^5} \rightarrow \frac{a}{3^6} + \frac{b}{3^3} + c = \frac{640}{3^5} \rightarrow$$
$$a + 27b + 729c = 1920;$$

$$P\left(-2; \frac{52}{27}\right): \quad f(-2) = \frac{52}{27} \rightarrow a \cdot 9^{-2} + b \cdot 3^{-2} + c = \frac{52}{3^3} \rightarrow \frac{a}{3^4} + \frac{b}{3^2} + c = \frac{52}{3^3} \rightarrow$$
$$a + 9b + 81\,c = 156;$$

$$A(0; -4): \quad f(0) = -4 \rightarrow a \cdot 9^0 + b \cdot 3^0 + c = -4 \rightarrow a + b + c = -4.$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a+27b+729c=1920 \\ a+9b+81\,c=156 \\ a+b+c=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 26b+728c=1924 \\ 8b+80c=160 \\ a+b+c=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+28c=74 \\ b+10c=20 \\ a+b+c=-4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 18c=64 \\ b=20-10c \\ a=-4-b-c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=-10 \\ a=3 \end{cases}.$$

La funzione è:

$$f(x)=3\cdot 9^x-10\cdot 3^x+3.$$

b. Risolviamo la disequazione.

$$\frac{f(x)+2\cdot 5^x}{4}\geq \frac{5^x}{2}\rightarrow f(x)+2\cdot 5^x\geq 2\cdot 5^x\rightarrow f(x)\geq 0$$
$$\rightarrow 3\cdot 3^{2x}-10\cdot 3^{3x}+3\geq 0$$

Usiamo una variabile ausiliaria, poniamo $t=3^x$ e otteniamo la disequazione algebrica:

$$3t^2-10t+3\geq 0.$$

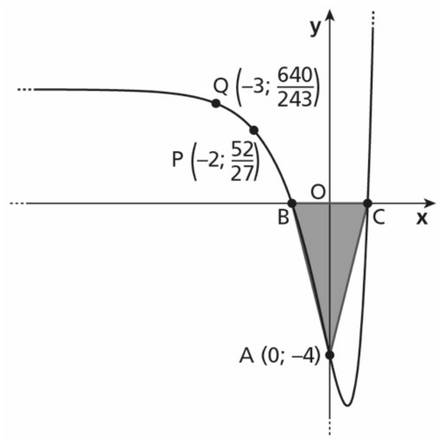
Risolviamo l'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4}=25-9=16\rightarrow t_{1,2}=\frac{5\pm 4}{3}\rightarrow t_1=3, t_2=\frac{1}{3}.$$

Quindi

$$t\leq 3^{-1}\vee t\geq 3\rightarrow 3^x\leq 3^{-1}\vee 3^x\geq 3\rightarrow x\leq -1\vee x\geq 1.$$

c. La disequazione del punto precedente ci ha permesso di studiare il segno di $f(x)$. Quindi, gli zeri di $f(x)$ sono ± 1. Pertanto, $B(-1;0)$ e $C(1;0)$.



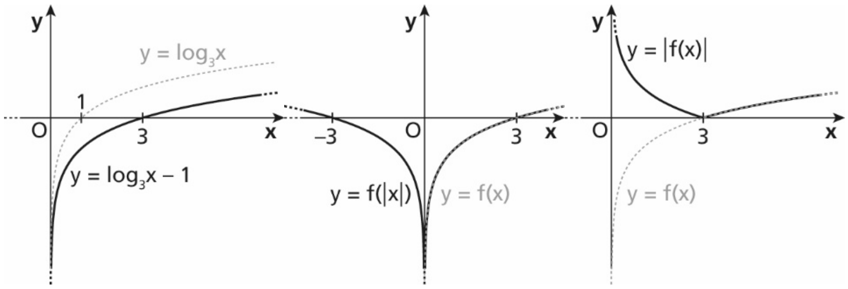
Il triangolo ha base $\overline{BC}=2$ e altezza $\overline{AO}=4$. Quindi, l'area è

$$Area=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4.$$

5 Tracciamo il grafico della funzione $y=\log_3 x$ e otteniamo il grafico di $f(x)=\log_3 x-1$ tramite traslazione verticale di vettore $\vec{t}(0;-1)$. Il dominio di $f(x)$ è $D_f=]0;+\infty[$.

Dato che $|x| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, il dominio di $g(x) = f(|x|)$ è $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$. Inoltre $|-x| = |x|$, quindi la funzione $g(x)$ è pari. Otteniamo il grafico di $g(x)$ confermando il grafico di
$f(x)$ e tracciando il suo simmetrico rispetto all'asse y.

La funzione $h(x)$ ha lo stesso dominio di $f(x)$ e il suo grafico si ottiene confermando il grafico di f negli intervalli in cui $f(x) \geq 0$ (ovvero per $x \geq 3$) e disegnando il simmetrico rispetto all'asse x del grafico di f negli intervalli in cui $f(x) < 0$ (ovvero per $0 < x < 3$).



6 **a.** Determiniamo le condizioni di esistenza, ricordando che la base del logaritmo deve essere un numero reale positivo diverso da 1 e che l'argomento deve essere un numero reale positivo.

$$\text{C. E.}: x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge 7x - 10 > 0 \rightarrow \text{C. E.}: x > \frac{10}{7}.$$

Per la definizione di logaritmo:

$$\log_x(7x - 10) = 2 \rightarrow 7x - 10 = x^2 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \rightarrow$$

$$x = 2 \vee x = 5.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

b. Determiniamo le condizioni di esistenza, osservando che per ogni x per cui la radice è definita l'argomento del logaritmo è positivo.

$$\text{C. E.}: x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x + 1 \geq 0 \rightarrow \text{C. E.}: x > 0 \wedge x \neq 1.$$

Per definizione di logaritmo:

$$\log_x\left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 1 \rightarrow \sqrt{x+1} + 1 = x \rightarrow \sqrt{x+1} = x - 1.$$

Risolviamo l'equazione irrazionale, tenendo conto delle C. E. dell'equazione logaritmica iniziale:

$$\begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x - 1 \geq 0 \\ x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x \geq 1 \\ x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = 0 \vee x = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3.$$

7 Applicando la formula del cambio di base otteniamo:

$$x = \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 = \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 6} = \log_3 7.$$

Usiamo il valore di x appena ottenuto per calcolare le tre espressioni.

a. $9^x = 9^{\log_3 7} = 3^{2\cdot\log_3 7} = 3^{\log_3 49} = 49$

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x = (3^{-3})^x = (3^x)^{-3} = \left(3^{\log_3 7}\right)^{-3} = 7^{-3} = \frac{1}{343}$

c. $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{3^x} = \sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{3^{\log_3 7}} = \sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

8 **a.** Imponiamo il passaggio per $A(2;1)$ e $B(16;2)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\log_2 2^n}{a+\log_2 2} = 1\\ \dfrac{\log_2 16^n}{a+\log_2 16} = 2\end{cases} \to \begin{cases}\dfrac{n}{a+1} = 1\\ \dfrac{4n}{a+4} = 2\end{cases} \to \begin{cases}n = a+1\\ 2n = a+4\end{cases} \to \begin{cases}n = a+1\\ n = 3\end{cases} \to \begin{cases}a = 2\\ n = 3\end{cases}.$$

b. Sostituiamo i valori dei parametri nell'espressione della funzione:

$$f(x) = \frac{\log_2 x^3}{2+\log_2 x}.$$

Determiniamo il dominio naturale D di f.

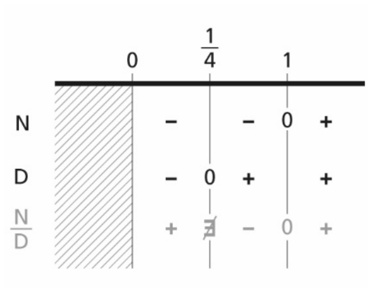
$$\begin{cases}x^3 > 0\\ x > 0\\ 2+\log_2 x \neq 0\end{cases} \to \begin{cases}x > 0\\ \log_2 x \neq -2\end{cases} \to \begin{cases}x > 0\\ x \neq 2^{-2}\end{cases} \to D = \mathbb{R}^+ - \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

Studiamo il segno di f.

$N \geq 0$: $\log_2 x^3 \geq 0 \to 3\log_2 x \geq 0 \to \log_2 x \geq 0 \to x \geq 1$;

$D > 0$: $2+\log_2 x > 0 \to \log_2 x > -2 \to x > \dfrac{1}{4}$.

Dal quadro dei segni concludiamo che $f(x) \geq 0$ per $0 < x < \frac{1}{4} \vee x \geq 1$ e $f(x) < 0$ per
$\frac{1}{4} < x < 1$.

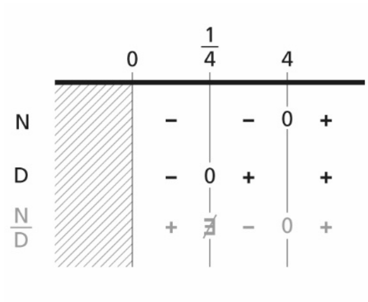


c.

$$f(x) \geq \frac{3}{2} \to \frac{\log_2 x^3}{2+\log_2 x} \geq \frac{3}{2} \to \frac{3\log_2 x}{2+\log_2 x} \geq \frac{3}{2} \to \frac{\log_2 x}{2+\log_2 x} - \frac{1}{2} \geq 0 \to$$
$$\frac{2\log_2 x - 2 - \log_2 x}{2+\log_2 x} \geq 0 \to \frac{\log_2 x - 2}{2+\log_2 x} \geq 0$$

$N \geq 0$: $\log_2 x \geq 2 \to x \geq 4$;

$D > 0$: $2+\log_2 x > 0 \to \log_2 x > -2 \to x > \dfrac{1}{4}$.



Dal quadro dei segni concludiamo che $f(x) \geq \frac{3}{2}$ per $0 < x < \frac{1}{4} \vee\ x \geq 4$.